BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2008

К НЕОБХОДИМЫМ УСЛОВИЯМ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБОГО ПО КОМПОНЕНТАМ УПРАВЛЕНИЯ

Ш.Ш.ЮСУБОВ
Бакинский Государственный Университет

В работе вводится понятие особого по компонентам управления, на его основе предлагается новая схема вывода необходимых условий и получены новые необходимые условия оптимальности для таких управлений. При этом полученные условия позволяют существенно сузить множество управлений, подозрительных на оптимальность.

Теория необходимых условий оптимальности первого и высокого порядков в системах описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями достаточно полно разработана (см., например,[1-4]) и, как показывают исследования, необходимые условия оптимальности высокого порядка тесно связаны с теорией оптимальных особых управлений. Известно (см. [3]), что всякое управление, особое в смысле принципа максимума Понтрягина, при дополнительных условиях гладкости на данные задачи и выпуклости множества значений управляющих функций является и квазиособым, но обратное, вообще говоря, не имеет места.

В данной работе вводится понятие особого по компонентам управления и на его основе предлагается новая схема вывода необходимых условий оптимальности. Получены новые необходимые условия оптимальности для особых по компонентам управлений. При этом полученные условия позволяют существенно сузить множество управлений, подозрительных на оптимальность.

1. Пусть управляемый процесс на отрезке времени $T=[t_0,t_1]$ описывается системой

$$\dot{x}=f(t,x,u),\qquad t\in T, \tag{1}$$

$$x(t_0)=x_0. \tag{2}$$

Здесь $x(t)$ - n-мерный вектор состояния системы, $u(t)$ - r-мерный вектор управления. Представим управление $u(t)$ в виде $u(t)=(v(t),w(t))'$,

$$v(t)=(v_1(t),\dots,v_{r_0}(t)),\ w(t)=(w_1(t),\dots,w_{r_1}(t)),\ 1\le r_0\le r,\ \ r_0+r_1=r;$$

$f(t,x,v,w)$ - заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (x,w) до второго порядка включительно, $x_0\in R^n$ - заданная точка.

В качестве множества допустимых управлений берем множество кусочно-непрерывных r-мерных функций $u(t)=(v(t),w(t))'$, $t\in T$ (в точках разрыва $u(t)$ непрерывна справа), принимающих значения из заданного непустого ограниченного множества U:

$$u(t) = (v(t), w(t))' \in U \subset R^r, \ t \in T. \qquad (3)$$

Кроме того, предполагаем, что проекция сечения U для каждого v на r_1-мерное пространство является выпуклым множеством.

Предполагается, что каждому допустимому управлению $(v(t), w(t))'$ соответствует единственное абсолютно непрерывное решение $x(t)$ системы (1), (2), определенное на T.

Задача заключается в минимизации функционала

$$S(v, w) = \varphi(x(T_1), \ldots, x(T_k)), \qquad (4)$$

определенного на решениях системы (1),(2), порожденных всевозможными допустимыми управлениями, где $\varphi(z_1, \ldots, z_k)$ - заданная дважды непрерывно-дифференцируемая по совокупности переменных скалярная функция, а $T_i \in (t_0, t_1], \ i = \overline{1, k}$ - заданные точки, причем $t_0 < T_1 < \ldots < T_k \le t_1$.

Допустимое управление $(v(t), w(t))'$, являющееся решением задачи о минимуме функционала (4) при ограничениях (1)-(3), назовем оптимальным управлением, соответствующее ему решение $x(t)$ системы (1),(2) - оптимальной траекторией, а соответствующий процесс $(v(t), w(t), x(t))$ - оптимальным процессом.

2. Пусть $(v(t), w(t), x(t))$ - фиксированный допустимый процесс в задаче (1)-(4). Введем следующие обозначения:

$H(t, x, v, w, \psi) \equiv \psi' f(t, x, v, w), \Delta_{\bar{v}} f(t) \equiv f(t, x(t), \bar{v}(t), w(t)) - f(t, x(t), v(t), w(t))$,

$f_x(t) \equiv f_x(t, x(t), v(t), w(t)), \ H_x(t) \equiv H_x(t, x(t), v(t), w(t), \psi(t))$ и т.д.

Здесь $\psi(t) - n-$мерная вектор-функция сопряженных переменных, определяемая соотношением

$$\psi(t) = -\sum_{i=1}^{k} F'(T_i, t) \frac{\partial \varphi(x(T_1), \ldots, x(T_k))}{\partial z_i}, \qquad t \in [t_0, t_1],$$

где матрица-функция $F(t, \tau)$ является решением интегрального уравнения:

$$F(t, \tau) = E + \int_{\tau}^{t} F(t, s) f_x(s) ds,$$

E – единичная $(n \times n)$ - матрица, $F(t, \tau) = 0$ при $t < \tau$.

Наряду с процессом $(v(t), w(t), x(t))$ рассмотрим другой допустимый процесс $(\bar{v}(t) = v(t) + \Delta v(t), \bar{w}(t) = w(t) + \Delta w(t), \bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t))$. Тогда приращение функционала можно представить в виде

$$\Delta S(v, w) = -\int_{t_0}^{t_1} [\Delta_{\bar{v}} H(t) + H'_w(t) \Delta w(t) + \Delta_{\bar{v}} H'_w(t) \Delta w(t) + \Delta_{\bar{v}} H'_x(t) \Delta x(t) +$$

$$+ \frac{1}{2} \Delta x'(t) H_{xx}(t) \Delta x(t) + \Delta x'(t) H_{xw}(t) \Delta w(t) + \frac{1}{2} \Delta w'(t) H_{ww}(t) \Delta w(t) +$$

$$+\frac{1}{2}(\Delta x'(t)\Delta_{\bar v}H_{xx}(t)\Delta x(t)+2\Delta x'(t)\Delta_{\bar v}H_{xw}(t)\Delta w(t)+$$
$$+\Delta w'(t)\Delta_{\bar v}H_{ww}(t)\Delta w(t))+o\left([\|\Delta x(t)\|+\|\Delta w(t)\|]^2\right)\Big]dt+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\Delta x'(T_i)\frac{\partial^2\varphi(x(T_1),...,x(T_k))}{\partial z_i\partial z_j}\Delta x(T_j)+o\left(\left[\sum_{i=1}^{k}\|\Delta x(T_i)\|\right]^2\right), \quad (5)$$

где $\Delta x(t)$ - решение задачи

$$\Delta\dot x(t)=f_x(t)\Delta x(t)+\Delta_{\bar v}f(t)+f_w(t)\Delta w(t)+$$
$$+\Delta_{\bar v}f_w(t)\Delta w(t)+\Delta_{\bar v}f_x(t)\Delta x(t)+o(\|\Delta x(t)\|+\|\Delta w(t)\|),\quad t\in[t_0,t_1],$$
$$\Delta x(t_0)=0,$$

а $o(\alpha)/\alpha\to 0,\ при\ \ \alpha\to 0$.

3. Из формулы (5) непосредственно следует, что для оптимальности допустимого процесса $(v(t),w(t),x(t))$ в задаче (1)-(4) необходимо, чтобы выполнялись

1) условие максимума Понтрягина:

$$\Delta_v H(t)\equiv H(t,x(t),v,w(t),\psi(t))-H(t,x(t),v(t),w(t),\psi(t))\le 0, \quad (6)$$
$$(v,w(t))'\in U,\quad t\in[t_0,t_1),$$

2) дифференциальный принцип максимума

$$H'_w(t)(w-w(t))\le 0,\quad (v(t),w)'\in U,\quad t\in[t_0,t_1). \quad (7)$$

Определение 1. Допустимое управление $(v(t),w(t))'$ назовем квазиособым по компоненте w, если существует такое множество $U_0\subset U$, что тождественно по $(v(t),w)'\in U_0$ выполняется условие

$$H'_w(t)(w-w(t))\equiv 0,\quad t\in[t_0,t_1),$$

где $U_0\setminus\{(v(t),w)'\}\ne\varnothing,\ t\in T$.

Вдоль квазиособого по компоненте w оптимального управления $(v(t),w(t))'$, из формулы (5) следует, что выполняется неравенство

$$(w-w(t))'H_{ww}(t)(w-w(t))\le 0,\quad (v(t),w)'\in U_0,\quad t\in[t_0,t_1). \quad (8)$$

Не исключена возможность вырождения условия оптимальности (6) и (8).

Определение 2. Квазиособое по компоненте w управление $(v(t),w(t))'$ назовем особым по компоненте v в смысле принципа максимума Понтрягина и сильно квазиособым по компоненте w, если существуют множества $U_1\subset U_0$ и $U_2\subset U$ такие, что выполняются условия

$$\Delta_v H(t)\equiv 0,\ (v,w(t))'\in U_2, \quad (9)$$
$$(w-w(t))'H_{ww}(t)(w-w(t))\equiv 0,\quad (v(t),w)'\in U_1,\quad t\in[t_0,t_1), \quad (10)$$

где $U_1\setminus\{(v(t),w)'\}\ne\varnothing,\ U_2\setminus\{(v,w(t))'\}\ne\varnothing,\ t\in T$.

Ясно, что при выполнении условий (9),(10) принцип максимума Понтрягина (6) и условие оптимальности (8) вырождаются и не дают никакой информации об оптимальности исследуемого управления. Поэтому требуются дополнительные исследования.

Из (5), определяя вариацию управления $(v(t),w(t))'$ различными способами, можно получить разные необходимые условия оптимальности в задаче (1)-(4). Например, с помощью многоточечной вариации управления $(v(t),w(t))'$ доказывается

Теорема 1. Для оптимальности особого по компоненте v в смысле принципа максимума Понтрягина и сильно квазиособого по компоненте w управления $(v(t),w(t))'$ в задаче (1)-(4) необходимо, чтобы для любого натурального числа m, для любых $a_i \ge 0,\ b_i \ge 0,$ $(v_i,w(t))' \in U_2$, $(v(t),w_i)' \in U_1$, $\tau_i \in (t_0,t_1),\ i=\overline{1,m}\ (t_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_m < t_1)$, выполнялось неравенство

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m}\Big(a_i\Delta_{v_i}H_x'(\tau_i)+b_i(w_i-w(\tau_i))'H_{wx}(\tau_i)\big)(a_i\Delta_{v_i}f(\tau_i)+\\
&+2\sum_{j=1}^{i-1}F(\tau_i,\tau_j)(a_j\Delta_{v_j}f(\tau_j)+b_jf_w(\tau_j)(w_j-w(\tau_j))))+\\
&+\sum_{i=1}^{m}b_i(w_i-w(\tau_i))'H_{wx}(\tau_i)(a_i\Delta_{v_i}f(\tau_i)+b_if_w(\tau_i)(w_i-w(\tau_i))+\\
&+\sum_{i,j=1}^{m}(a_i\Delta_{v_i}f(\tau_i)+b_if_w(\tau_i)(w_i-w(\tau_i)))'M(\tau_i,\tau_j)(a_j\Delta_{v_j}f(\tau_j)+\\
&\qquad\qquad+b_jf_w(\tau_j)(w_j-w(\tau_j)))\le 0\ , \qquad (11)
\end{aligned}$$

где

$$M(\tau,s)=-\sum_{i,j=1}^{k}F'(T_i,\tau)\frac{\partial^2\varphi(x(T_1),\ldots,x(T_k))}{\partial z_i\partial z_j}F(T_j,s)+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}F'(T,\tau)H_{xx}(t)F(t,s)dt\,.$$

Из условия (11) можно получить различные более удобные для проверки необходимые условия оптимальности для особых по компоненте v в смысле принципа максимума Понтрягина и сильно квазиособых по компоненте w управлений $(v(t),w(t))'$. Например, при $m=1$ имеет место

Теорема 2. Если $(v(t),w(t))'$ - особое по компоненте v в смысле принципа максимума Понтрягина и сильно квазиособое по компоненте w оптимальное управление в задаче (1)-(4), то вдоль процесса $(v(t),w(t),x(t))$ выполняется условие

$$\begin{aligned}
&a^2(\Delta_v H_x'(t)\Delta_v f(t)+\Delta_v f'(t)M(t,t)\Delta_v f(t))+\\
&+2ab\Delta_v f'(t)(H_{xw}(t)+M(t,t)f_w(t))(w-w(t))+ \qquad (12)\\
&+b^2(w-w(t))'(H_{wx}(t)+f_w'(t)M(t,t))f_w(t)(w-w(t))\le 0\,,
\end{aligned}$$

для всех $a\ge 0, b\ge 0,\ (v,w(t))'\in U_2,\ (v(t),w)'\in U_1,\ t\in(t_0,t_1)$.

Из (12) получается

Следствие. Для оптимальности особого по компоненте v в смысле принципа максимума Понтрягина и сильно квазиособого по компоненте w управления $(v(t), w(t))'$ в задаче (1)-(4) необходимо, чтобы выполнялись неравенства

$$a(t;v) \equiv \Delta_v H_x'(t)\Delta_v f(t) + \Delta_v f'(t)M(t,t)\Delta_v f(t) \le 0, \ (v, w(t))' \in U_1, \quad t \in (t_0, t_1), \tag{13}$$

$$b(t,w) \equiv (w - w(t))'(H_{wx}(t) + f_w'(t)M(t,t))f_w(t)(w - w(t)) \le 0, \ (v(t), w)' \in U_1, \quad t \in (t_0, t_1), \tag{14}$$

$$\Delta_v f'(t)(H_{xw}(t) + M(t,t)f_w(t))(w - w(t)) \le \sqrt{a(t;v) \cdot b(t,w)}, \tag{15}$$

$$(v, w(t))' \in U_2, (v(t), w)' \in U_1, \quad t \in (t_0, t_1).$$

Эффективность выведенного необходимого условия покажем на примере

$$S(u) = x_2(1) \to \min,$$

$$\dot{x}_1 = |u_1|, \quad \dot{x}_2 = u_2 x_1 + u_2^6, \ t \in T = [0,1], \ x_i(0) = 0, i = 1,2,$$

$$U = \{(u_1, u_2)' : u_1 = 0, \pm 1, \ \ u_2 \in [-1, 0]\}.$$

Легко показать, что управление $(u_1, u_2)' = (0,0)'$ вместе с соответствующим решением $x_1(t) \equiv x_2(t) \equiv 0, \quad t \in T$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина. Следовательно, в силу результатов работ [1-4] рассмотренное управление остается в числе претендентов на оптимальность. Но, так как $\Delta_{u_1} H = 0, \ H_{u_2} = 0$, $H_{u_2 u_2} = 0$, то управление $(0,0)'$ является особым по компоненте u_1 в смысле принципа максимума Понтрягина и сильно квазиособым по компоненте u_2. На этом управлении

$$\Delta_{u_1} H_x'(t) \cdot \Delta_{u_1} f(t) \equiv 0, \qquad \Delta_{u_1} f'(t) H_{x u_2}(t)(u_2 - u_2(t)) \equiv -|u_1| u_2,$$

$$(u_2 - u_2(t)) H_{x u_2}'(t) f_{u_2}(t)(u_2 - u_2(t)) \equiv 0, \qquad M(t,t) \equiv 0.$$

Отсюда видно, что и результаты работы [5] оставляют управление $(0,0)'$ в числе претендентов на оптимальность, а условие (15) принимает вид

$$-|u_1| u_2 \le 0, \quad \forall u_1 \in \{0, \pm 1\}, \ \ \forall u_2 \in [-1, 0],$$

и очевидно, что оно не выполняется при $u_1 = \pm 1$ и любом $u_2 \in [-1, 0)$.

Поэтому управление $(0,0)'$ не может быть оптимальным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука. 1983.
2. Розоноэр Л.И. Принцип максимума Л.С.Понтрягина в теории оптимальных систем II. Автоматика и телемехан., 1959. т.20. №11. С.1442-1458.
3. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973. 256 с.
4. Меликов Т.К. К необходимым условиям оптимальности второго порядка. В кн: Математические методы оптимизации и управления в сложных системах. Изд.-во Калининского Гос. Ун-та, 1983, с.100-106.
5. Юсубов Ш.Ш. О необходимых условиях оптимальности для особых управлений. ЖВМ и МФ.2007. т.47. №9. С.1506-1511.

KOMPONENTLƏRİNƏ NƏZƏRƏN MƏXSUSİ İDARƏEDİCİNİN OPTİMALLIĞI ÜÇÜN ZƏRURİ ŞƏRTLƏR HAQQINDA

Ş.Ş.YUSUBOV

XÜLASƏ

İşdə кomponentlərinə nəzərən məxsusi idarəedici anlayışı daxil edilmiş, onun əsasında zəruri şərtlər almaq üçün yeni sxem təкlif olunmuş və belə idarəedicilərin optimallığı üçün yeni zəruri şərtlər alınmışdır. Alınan zəruri şərtlər optimallığa şübhəli olan idarəedicilər çoxluğunu кifayət qədər daraltmağa imкan verir.

ON A NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS FOR THE SINGULAR WITH RESPECT TO COMPONENTS OF THE CONTROLS

Sh.Sh.YUSUBOV

SUMMARY

In this work the notation of the components of control is introduced. On this base the new scheme for the finding of the necessary conditions is given and the new necessary conditions of the optimality for these controls are received. Therefore the obtained conditions help us essentially restrict the set of controls, which are doubt for the optimality.